Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Die Rotation der Planeten
Merkur und Venus

J. Brandt.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK
UTGIFVET AF
K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM
BAND 4. N:O 23.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

DIE ROTATION

DER

PLANETEN MERKUR UND VENUS

VON

C. V. L. CHARLIER.

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

LONDON
WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET. STRAND

PARIS
LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 23.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

N:o 37

Die Rotation der Planeten Merkur und Venus.

Von

C. V. L. CHARLIER.

1. Bekanntlich ist unsere Kenntnis der Rotationsverhältnisse der beiden sonnennahen Planeten Merkur und Venus sehr mangelhaft. Auch über die Werte der Trägheitsmomente der Planeten und über die Richtung der Hauptträgheitsachsen weiss man so gut wie Nichts. Es liegt auch in der Natur der Sache, dass die Beobachtungen schwerlich zuverlässige Werte der letztgenannten Grössen (die Grösse und die Richtung der Trägheitsachsen) geben können, da die beiden Planeten von den *Phasen* stark verstellt gesehen werden.[1] Es erscheint unter solchen Umständen nicht der Mühe wert die Rotationsverhältnisse dieser Planeten einer mathematischen Analyse zu unterwerfen. Es gibt indessen eine eigentümliche Art der Rotation, die von der Theorie als möglich hervorgehoben wird, die aber — wie es scheint — nicht von den Beobachtern in Betracht gezogen worden ist. Ich will diese Rotationsart hier untersuchen. Wenn spätere Beobachtungen zeigen werden, dass diese Untersuchung nicht auf die Planeten Merkur und Venus ihre Anwendung finden, werden wahrscheinlich anderswo im Weltsystem Beispiele dieser Rotationsart nicht fehlen.

[1] Höchstens könnte man erwarten, dass man — besonders aus photographischen Beobachtungen der Vorübergängen der beiden Planeten über die Sonnenscheibe — die Dimensionen der Planeten senkrecht zum Radius Vector bestimmen könnte, obgleich unten aussereinandergesetzte Gründe wahrscheinlich machen, dass die entsprechende Abplattung eine äusserst geringe ist.

In meinen Vorlesungen über die Rotation des Mondes habe ich gezeigt, dass *bei gebundener Rotation* drei verschiedene Rotationstypen vorkommen können, nämlich

1) die Achse des *kleinsten* Trägheitsmomentes ist gegen den Zentralkörper gerichtet und die Rotation findet um die Achse des *grössten* Trägheitsmomentes statt.

Dies ist der Fall, der beim Mond der Erde vorkommt.

2) Die Achse des *mittleren* Trägheitsmomentes ist gegen den Zentralkörper gerichtet und die Rotation findet um die Achse des *kleinsten* Trägheitsmomentes statt.

In diesen beiden Fällen müssen ausserdem gewisse Ungleichheiten erfüllt sein, die ich an a. O. abgeleitet habe.

Obgleich die Bedingungen für 1) oder 2) nicht erfüllt sind, kann doch eine gebundene Rotation vorkommen. Diese Rotation erscheint aber unter den Voraussetzungen, die den Untersuchungen über die Rotation des Mondes zu Grunde liegen, als

3) *»unstabil»*, wogegen die unter 1) und 2) aufgeführten Bewegungsformen stabil sind.

Die Unstabilität rührte daher, dass in den Variationsgleichungen, die zu einer gewissen partikularen Lösung des Rotationsproblems gehören, Exponentialgrössen auftreten, welche mit der Zeit über alle Grenzen wachsen.

Eine Bewegung kann aber von einem Gesichtspunkte »unstabil» erscheinen, obgleich sie, von einem anderen Gesichtspunkte betrachtet, als *»stabil»* charakterisiert werden kann. Dies ist eben mit der Rotationsform 3) der Fall. Um sie zu studieren, muss man einen anderen Ausgangspunkt wählen, als denjenigen, der sich für der Mond am meisten angemessen erwies.

2. Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in Meddel. N:o 31 (»Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems»). Anstatt aber die Achse z, welche den Trägheitsmoment C entspricht, mit der gewöhnlich s. g. Rotationsachse zusammenfallen zu lassen, wie für den Mond und die Planeten das Einfachste ist, lasse ist die im Körper feste z-Achse *mit der gegen die Sonne gerichtete Hauptträgheitsachse* zusammenfallen. Ich nehme an, dass die Rotation eine »gebundene» ist, und dass die z-Achse also genähert mit dem Radius Vector des Planeten zusammenfällt. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial u_i}; \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial \alpha_i}, \tag{1}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

wo

$$\begin{aligned} H' = \frac{\alpha_2^2}{2C} + k_1 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \sin^2 u_1 + k_2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2C} \cos^2 u_1 + \\ + \alpha_3 \frac{d\lambda}{dt} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} [k_1 A \cos^2 \alpha + k_2 B \cos^2 \beta], \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Werte von $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ in Meddel. N:o 33 angeführt sind.[1]

Das Problem kann in dieser allgemeinen Form behandelt werden. Die Bewegungsformen können aber ziemlich verwickelt werden, und es scheint angemessen hier einige vereinfachende Annahmen zu machen. Würden etwa die Beobachtungen zeigen, dass dieser Rotationsfall wirklich vorkommt, kann man eine umständlichere Untersuchung vornehmen.

Ich nehme also an, 1) dass der Planet sich in einem *Kreis* um die Sonne bewegt, 2) dass der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der Trägheitsachse z klein ist, 3) dass der Winkel ε zwischen der Zentralachse und der Achse der Ekliptik nahe gleich 90° ist. Endlich nehme ich 4) an, dass die Trägheitsmomente A und B gleich sind.

Es ist dann angemessen folgende neue Veränderlichen einzuführen:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_2 &; \quad \eta_1 &= u_1 + u_2, \\ \xi_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 (1 - \cos \theta_0); &\quad \eta_2 &= -u_1 \quad, \\ \xi_3 &= \alpha_3 = -\alpha_2 \cos \varepsilon &; \quad \eta_3 &= u_3 - \lambda = u'_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Die neuen Veränderlichen — $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ — sind auch kanonisch. Die Grössen ξ_2 und ξ_3 können als klein betrachtet werden.

Da nun $k_1 = k_2$ ist, erhalten wir

[1] Es ist in (1) $u_3 - \lambda$ statt u_3 eingeführt, weil dadurch die Länge λ des Planeten eliminiert wird. In (1) heisst deswegen die dritte Winkelveränderliche u'_3, die gleich $u_3 - \lambda$ ist. Man vergleiche die Formeln (3).

$$(4)\quad H' = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{AC}\left(\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_2^2\right) + n\xi_3 + \frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\gamma,$$

wo n die mittlere Bewegung des Planeten bezeichnet, und die Masse des Planeten im Verhältnis zur Sonnenmasse vernachlässigt wird. Für $\cos\gamma$ hat man nach Meddel. N:o 33 den Wert

$$(5)\quad \begin{aligned} \cos\gamma = \sin\theta_0\,[\sin u_2\cos u'_3 - \cos u_2\sin u'_3\cos\varepsilon] - \\ - \cos\theta_0\sin\varepsilon\sin u'_3. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{1}{2}\sin\theta_0\,[\sin(u_2 - u'_3) + \sin(u_2 + u'_3) + \\ &\quad + (\sin(u_2 - u'_3) - \sin(u_2 + u'_3))\cos\varepsilon] - \cos\theta_0\sin\varepsilon\sin u'_3 \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta_0\,[\sin(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3) + \sin(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + \\ &\quad + (\sin(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3) - \sin(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3))\cos\varepsilon] - \\ &\quad - \cos\theta_0\sin\varepsilon\sin\eta_3. \end{aligned}$$

Es muss bemerkt werden, dass die Differentialgleichungen (1) offenbar das Integral

$$\alpha_1 = \text{Konstans}$$

besitzen. Hierdurch lassen sich die Bewegungsgleichungen auf 2 Freiheitsgrade reduzieren. Für den hier vorliegenden Zweck ist aber diese Reduktion nicht notwendig.

Es ist indessen vorteilhaft noch eine Transformation auszuführen. Wir setzen

$$(6)\quad \begin{aligned} u &= \sqrt{2\xi_2}\cos\eta_2, \\ v &= \sqrt{2\xi_2}\sin\eta_2. \end{aligned}$$

Da

$$2\xi_2 = 4\xi_1\sin^2\frac{1}{2}\theta_0,$$

$$4\xi_1 - 2\xi_2 = 4\xi_1\cos^2\frac{1}{2}\theta_0,$$

hat man

$$\xi_1 \cos\theta_0 = \xi_1 - \xi_2,$$
$$\xi_1 \sin\theta_0 = \sqrt{2\xi_2}\,\sqrt{\xi_1}\,\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}},$$

und folglich

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{1-\frac{\xi_2}{2\xi_1}}}{2\sqrt{\xi_1}}\Big[u\sin(\eta_1-\eta_3)+v\cos(\eta_1-\eta_3)+$$
$$+u\sin(\eta_1+\eta_3)+v\cos(\eta_1+\eta_3)-\frac{\xi_3}{\xi_1}(u\sin(\eta_1-\eta_3)+$$
$$+v\cos(\eta_1-\eta_3)-u\sin(\eta_1+\eta_3)-v\cos(\eta_1+\eta_3)\Big]-$$
$$-\left(1-\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\sqrt{1-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}}\sin\eta_3.$$

Dieser Ausdruck ist genau und gilt für alle Annahmen über die Integrationskonstanten. Indessen werden wir nun die Grössen

$$\frac{u}{\sqrt{\xi_1}},\ \frac{v}{\sqrt{\xi_1}}\ \text{und}\ \frac{\xi_3}{\xi_1}$$

als kleine Grössen betrachten und die dritte Potenz derselben vernachlässigen.

Man hat dann

$$\cos^2\gamma =$$
$$=\frac{1}{4\xi_1}\big[u^2(\sin^2(\eta_1-\eta_3)+\sin^2(\eta_1+\eta_3)+2\sin(\eta_1-\eta_3)\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v^2(\cos^2(\eta_1-\eta_3)+\cos^2(\eta_1+\eta_3)+2\cos(\eta_1-\eta_3)\cos(\eta_1+\eta_3))$$
$$+2uv(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3))(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3))\big]$$
$$+\left(1-\frac{2\xi_2}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}\right)\sin^2\eta_3$$
$$-\frac{\sin\eta_3}{\sqrt{\xi_1}}\Big[\ u(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3))$$
$$-\frac{\xi_3}{\xi_1}(u(\sin(\eta_1-\eta_3)-\sin(\eta_1+\eta_3))$$
$$+v(\cos(\eta_1-\eta_3)-\cos(\eta_1+\eta_3))\Big]$$

oder

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\gamma = \\
&= \frac{1}{4\xi_1}\Big[(u^2+v^2)(1+\cos 2\eta_3) \\
&\quad -(u^2-v^2)\left(\frac{1}{2}\cos 2(\eta_1-\eta_3)+\frac{1}{2}\cos 2(\eta_1+\eta_3)+\cos 2\eta_1\right) \\
&\quad + uv\,(\sin 2(\eta_1-\eta_3)+\sin 2(\eta_1+\eta_3)+2\sin 2\eta_1)\Big] \\
&+\left(1-\frac{u^2+v^2}{\xi_1}-\frac{\xi_3^2}{\xi_1^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\eta_3\right) \\
(7)\quad & \\
&-\frac{\sin\eta_3}{\sqrt{\xi_1}}\Big[\;u\,(\sin(\eta_1-\eta_3)+\sin(\eta_1+\eta_3)) \\
&\quad + v\,(\cos(\eta_1-\eta_3)+\cos(\eta_1+\eta_3)) \\
&\quad -\frac{\xi_3}{\xi_1}(u\,(\sin(\eta_1-\eta_3)-\sin(\eta_1+\eta_3)) \\
&\qquad + v\,(\cos(\eta_1-\eta_3)-\cos(\eta_1+\eta_3))\Big].
\end{aligned}
$$

Wird derjenige Teil von H', der nicht mit n^2 multipliziert ist, mit H_0 bezeichnet, so hat man

$$H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C}+\frac{C-A}{2AC}\left[\xi_1(u^2+v^2)-\frac{1}{4}(u^2+v^2)^2\right]+n\xi_3 \tag{8}$$

und dann ist

$$H' = H_0 + \frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\gamma. \tag{9}$$

In der ersten Annäherung werden wir das zweite Glied in (9) vernachlässigen.

Unsere kanonischen Veränderlichen sind

$$
\begin{aligned}
&\xi_1,\ \eta_1\\
&u\ ,\ v\\
&\xi_3,\ \eta_3.
\end{aligned}
$$

Da in H_0 weder η_1 noch η_3 vorkommt, hat man in der ersten Annäherung

$$\xi_1 = \text{Konstante} = \xi_1^0$$
$$\xi_3 = \text{Konstante} = \xi_3^0.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial v}; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial u}$$

findet man aber, da H_0 eine Funktion von $u^2 + v^2$ ist, so dass

$$u\frac{\partial H_0}{\partial v} - v\frac{\partial H_0}{\partial u} = 0$$

ist, dass

$$u^2 + v^2 = \text{Konstante} = 2\xi_2^0$$

ist.

Wir können also hier zweckmässig die Veränderlichen

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3$$

behalten, so dass

$$H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C-A}{AC}\left(\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_2^2\right) + n\xi_3$$

ist, und erhalten zur Bestimmung von η_1, η_2 und η_3 die Gleichungen

$$\frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\xi_1}{C} - \frac{C-A}{AC}\xi_2,$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{C-A}{AC}(\xi_1 - \xi_2),$$

$$\frac{d\eta_3}{dt} = -n,$$

wo für ξ_1 und ξ_2 rechter Seite die konstanten Werte ξ_1^0 und ξ_2^0 einzuführen sind. Die Grössen η_1, η_2 und η_3 wachsen also proportional der Zeit und zwar verändert sich η_2 sehr langsam. Der Winkel η_3 wächst in einer Periode gleich der Umlaufszeit des Planeten um 360°. Wir können also schreiben

$$\eta_1 = \nu_1 t + c_1,$$
$$\eta_2 = \nu_2 t + c_2,$$
$$\eta_3 = \nu_3 t + c_3,$$

wo

(10) $$\nu_3 = -n$$

ist.

Für u und v, bekommen wir die Ausdrücke

$$u = \sqrt{2\xi_2^0}\cos(\nu_2 t + c_2),$$
$$v = \sqrt{2\xi_2^0}\sin(\nu_2 t + c_2).$$

Nach der Methode der Störungstheorie können nun die Glieder, die vom zweiten Teil von H' herrühren, berücksichtigt werden. Wir setzen also

(11) $$\xi_i = \xi_i^0 + \varDelta\xi_i,$$
$$\eta_i = \nu_i t + c_i + \varDelta\eta_i.$$

Die »Störungsfunktion», die wir mit H_1 bezeichnen, hat dann den Ausdruck

$$H_1 = \frac{3}{2} n^2 (C - A) \cos^2\gamma.$$

Zur Erhaltung der *secularen* Glieder bezeichnen wir den von kurzperiodischen Gliedern unabhängigen Teil von H_1 mit $[H_1]$. Es ist dann

(12) $$[H_1] = -\frac{3}{4} n^2 (C - A)\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - \frac{\xi_3^2}{2\xi_1^2}\right),$$

welche Gleichung zeigt, *dass in ξ_1, ξ_2 und ξ_3 keine sekularen Störungen auftreten*. Dagegen werden die Grössen η_1, η_2 und η_3 kleinen sekularen Störungen unterliegen. Im Besonderen wird für η_3

(13) $$[\varDelta\eta_3] = \frac{3}{4} n^2 (C - A)\frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}} t$$

Ausser den sekularen Störungen kommen periodische Störungen vor, die ich hier nicht näher untersuchen werde.

Ich will zunächst die Form der Ausdrücke für die EULER'schen Winkel bestimmen. Da hier $\varepsilon > \theta_0$, hat man nach Meddel. N:o 31, Formel (25)

$$\varphi + u_1 = -u_2 + \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin s u_2$$

$$+ \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin s u_2 ;$$

$$\psi + u_3 = \qquad - \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_1^s \sin s u_2$$

$$+ \sum{}' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} \varkappa_2^s \sin s u_2 .$$

Sehen wir von den periodischen Gliedern ab, so ist also

$$\begin{aligned} \varphi &= -u_1 - u_2 , \\ \psi &= -u_3 \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

Man hat aber nach (3)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\upsilon_2 \quad , \\ u_2 &= \upsilon_1 + \upsilon_2 , \\ u_3 &= \upsilon_3 + \lambda = \upsilon_3 - nt - c - 180^\circ , \end{aligned}$$

wo $nt - c$ die mittlere Länge des Planeten bezeichnet. Von den sekularen Störungen abgesehen ist aber nach dem Obigen

$$\upsilon_3 = -nt - c_3 ,$$

so dass mithin nach (14)

$$\psi = \text{Konstans} \tag{15}$$

ist. Folglich hat die Rotationsachse z, unter den gegebenen Voraussetzungen eine unveränderliche Lage im Raum. Die sekularen Störungen bewirken indessen, dass der Winkel ψ langsam um den Wert

$$\frac{3}{4} n^2 (C - A) \frac{\zeta_0 \, \zeta_3}{\zeta_{02} \, \zeta_1} t \quad , \tag{16}$$

wächst.

Wir sind also zum Schluss gekommen, dass unter den gemachten Voraussetzungen — θ_0 klein, ε nahe gleich 90° — *keine gebundene Rotation vorkommen kann.* Es sei dann, dass der Unterschied zwischen den beiden Trägheitsmomenten C und A so gross ist, dass der Koeffizient von t in (16) mit der mittleren Bewegung n des Planeten vergleichbar sei, was aber für die betreffenden Planeten als höchst unwahrscheinlich betrachtet werden muss.

3. Statt der Bedingungen 2) und 3) oben nehme ich nun an, dass

2) der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der Trägheitsachse z — welche vom Anfang an gegen die Sonne gerichtet ist — nahe gleich 90° ist;

2) dass der Winkel ε zwischen der Zentralachse und der Achse der Ekliptik klein ist.

Die Rotation findet dann hauptsächlich um eine zur Ekliptik senkrechten Achse statt; ausserdem ist eine langsame Drehung um die gegen die Sonne gerichtete z-Achse vorhanden.

Ich führe nun die neuen Veränderlichen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_2; & \eta_1 &= u_2 - u'_3, \\ \xi_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 \cos\theta_0; & \eta_2 &= u_1, \\ \xi_3 &= \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2(1 - \cos\varepsilon); & \eta_3 &= u'_3 - u_3 - \lambda, \end{aligned}$$

ein, welche Koordinaten auch kanonisch sind, wie man am leichtesten mit dem POINCARÉ'schen Kriterium

$$\Sigma\, \xi\, \eta = \Sigma\, \alpha\, u$$

kontrollieren kann.

Wir setzen wie vorher

$$H' = H_0 + H_1$$

und erhalten

$$H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} + \frac{C - A}{2AC}(\xi_1^2 - \xi_2^2) + n(\xi_2 - \xi_1), \tag{18}$$

$$H_1 = \frac{3}{2} n^2 (C - A) \cos^2\gamma. \tag{18'}$$

Zuerst betrachte ich die Gleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3),$$

welche für ξ_1, ξ_2 und ξ_2 konstante Werte geben, und für η_1, η_2, η_3 lineare Funktionen der Zeit. Wir schreiben demnach die Lösung in der Form

$$\xi_1 = \xi_1^0; \qquad \xi_2 = \xi_2^0; \qquad \xi_3 = \xi_3^0;$$
$$\eta_1 = \nu_1 t + c_1; \quad \eta_2 = \nu_2 t + c_2; \quad \eta_3 = \nu_3 t + c_3,$$

und zwar ist

$$\nu_1 = -\frac{\xi_1^0}{C} - \frac{C - A}{AC}\xi_1^0 + n,$$
$$\nu_2 = \frac{C - A}{AC}\xi_2^0,$$
$$\nu_3 = -n.$$

Nach Meddel. N:o 31 Formel (26), die hier für $\varepsilon < \theta_0$ zur Anwendung kommt, hat man bis auf periodische Glieder

$$\begin{aligned} \varphi &= \ -u_1 \ = -\eta_2, \\ \psi &= u_2 - u_3 = \eta_1 - \lambda. \end{aligned} \tag{19}$$

Wenn die z-Achse gegen die Sonne gerichtet bleiben soll, so muss in der ungestörten Bewegung $-\psi = \lambda \pm 90°$ sein und folglich darf η_1 kein sekulares Glied enthalten, sondern muss um $\pm$ 90° schwanken. Die Integrationskonstante ξ_1^0 muss also die Gleichung

$$\frac{\xi_2^0}{C}\left(1 + \frac{C - A}{A}\right) = n$$

befriedigen, so dass $\eta_1 \pm 90°$ klein bleibt.

Es fragt sich nun ob beim Hinzuziehen des Störungsglieds H_1 die Grösse η_1 klein bleiben kann.

Zunächst ist der Ausdruck für $\cos^2\gamma$ durch die Veränderlichen ξ_i und η_i zu bilden.

Man hat

$$\cos \gamma = \sin \theta_0 \left[\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \sin (u_2 - u'_3) + \frac{1 - \cos \varepsilon}{2} \sin (u_2 + u'_3) \right]$$
$$- \cos \theta_0 \sin \varepsilon \sin u'_3 ,$$

woraus

$$\cos^2 \gamma = \sin^2 \theta_0 \left[\left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 (u_2 - u'_3) \right) + \right.$$
$$+ \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 (u_1 + u'_3) \right) +$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \sin (u_2 - u'_3) \sin (u_2 + u'_3) \right]$$
$$- \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varepsilon \left[\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} (\cos (u_2 - 2 u'_3) - \cos u_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1 - \cos \varepsilon}{2} (- \cos (u_2 + 2 u'_3) + \cos u_2) \right]$$
$$+ \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varepsilon \sin^2 u'_3 .$$

Es wird sich empfehlen die Veränderlichen

$$p = \sqrt{2 \xi_3} \cos \eta_3 ,$$
$$q = \sqrt{2 \xi_3} \sin \eta_3$$

ein zuführen.

Man hat dann

$$2 \xi_3 = 4 \xi_1 \frac{1 - \cos \varepsilon}{2} = p^2 + q^2 ,$$
$$4 \xi_1 \frac{1 + \cos \varepsilon}{2} = 4 \xi_1 - (p^2 + q^2) ,$$
$$4 \xi_1^2 \sin^2 \varepsilon = (4 \xi_1 - (p^2 + q^2)) (p^2 + q^2) .$$

Weiter ist

$$\cos \theta_0 = \frac{\xi_2}{\xi_1} ; \ \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}} ,$$

und

$$u_2 = \eta_1 + \eta_3 ,$$
$$u'_3 = \eta_3 .$$

Man erhält dann

$$\cos\gamma = \frac{1}{4\,\xi_1}\sqrt{1-\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}}\,\bigl[(4\,\xi_1-(p^2+q^2))\sin\eta_1 + (p^2+q^2)\sin(\eta_1+2\,\eta_2)\bigr] - \frac{\xi_2}{\xi_1}\,\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{\xi_1}}\sin\eta_3\sqrt{1-\frac{p^2+q^2}{4\,\xi_1}}\,.$$

Werden die Gliede dritter Ordnung vernachlässigt und wird auch $\cos\eta_1$ als eine kleine Grösse betrachtet, erhält man hieraus

$$\cos\gamma = \sin\eta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2. \tag{20}$$

Es ist also bis auf Glieder dritter Ordnung

$$\cos^2\gamma = \sin^2\eta_1 - \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2.$$

Für H' erhält man der Ausdruck

$$\begin{aligned} H' = \frac{\xi_1^2}{2\,C} + \frac{C-A}{2\,A\,C}(\xi_1^2-\xi_2^2) + n\left(\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\xi_1\right) + \\ + \frac{3}{2}\,n^2\,(C-A)\left[\sin^2\eta_1 - \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right)^2\right]. \end{aligned}\tag{21}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,\xi_1}{d\,t} &= \frac{\partial H'}{\partial\eta_1} = 3\,n^2\,(C-A)\sin\eta_1\cos\eta_1\,,\\ \frac{d\,\eta_1}{d\,t} &= -\frac{\partial H'}{\partial\xi_1} = -\frac{\xi_1}{A}+n\,. \end{aligned}\right.\tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,\xi_2}{d\,t} &= 0 = -\frac{\partial H'}{\partial\eta_2}\,,\\ \frac{d\,\eta_2}{d\,t} &= -\frac{\partial H'}{\partial\xi_2} = \frac{C-A}{A}\,\frac{\xi_2}{C} + 3\,n^2\,\frac{(C-A)}{\xi_1}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}+\frac{q}{\sqrt{\xi_1}}\right) \end{aligned}\right.\tag{22*}$$

$$(22^{**})\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q} = nq - 3n^2(C-A)\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1} - \dfrac{q}{1+\xi_1}\right)\dfrac{1}{1+\xi_1}, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial p} = -np. \end{cases}$$

Wir setzen nun

$$(23)\qquad \varphi = 90^\circ + y,$$

so dass die Gleichungen für ξ_1 und y lauten, wenn die höheren Potenzen von y vernachlässigt werden,

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = 3n^2(C-A)\,y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\xi_1}{A} - n, \end{cases}$$

welche Gleichungen die Integrale

$$(25)\qquad \begin{cases} \xi_1 = An + An\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,F\cos\left(n\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,t + G\right), \\[2ex] y = F\sin\left(n\sqrt{\dfrac{3(A-C)}{A}}\,t + G\right). \end{cases}$$

besitzen.

Die Bewegung ist *stabil*, wenn

$$A > C$$

ist, d. h. *wenn der Planet gegen die Sonne verlängert ist.*

Man findet weiter, dass ξ_2 einer konstanten Wert hat. Die Gleichungen für p und q lauten

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -qn\left(1 - \dfrac{3(C-A)}{A}\right) - 3n\dfrac{(C-A)}{A}\,\dfrac{\xi_2}{1+An}, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = -np. \end{cases}$$

Wenn die Konstanten f, g_1, h_1, g_2, h_2 in geeigneter Weise bestimmt werden, haben die Integrale dieser Gleichungen die Form

$$p = \qquad g_1 \cos(\nu t + h).$$
$$q = f + g_2 \sin(\nu t + h).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten erhalten wir die Gleichungen

$$(27) \qquad f n \left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) - 3n \frac{C-A}{A} \frac{\xi_2}{\sqrt{An}} = 0.$$

$$(28) \qquad \begin{cases} \nu g_1 + n\left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) g_2 = 0 \\ n g_1 + \nu g_2 \qquad\qquad\qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung für ν ist also

$$\begin{vmatrix} \nu, & n\left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right) \\ n, & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

oder

$$(29) \qquad \nu^2 = n^2 \left(1 - \frac{3(C-A)}{A}\right).$$

Der Wert von ν ist reell und nahe gleich n, p schwankt zwischen den Werten $-g_1$ und $+g_1$, q zwischen $f - g_2$ und $f + g_2$. Wir können g_1 und h als die Integrationskonstanten betrachten. Der Wert von f wird aus (27) erhalten und für g_2 erhält man die Gleichung

$$(30) \qquad g_2 = -\frac{n}{\nu} g_1.$$

Weiter bekommt man

$$p^2 + q^2 = 2\xi_3 = f^2 + g_1^2 \cos^2(\nu t + h) + g_2^2 \sin^2(\nu t + h) +$$
$$+ 2 f g_2 \sin(\nu t + h),$$

welche Gleichung zeigt, dass ξ_3 und auch ε zwischen endlichen und zwar engen Grenzen schwanken. Die Zentralachse Z_0 bleibt also in der Nähe der Achse der Ekliptik.

Für die EULER'schen Winkel φ und ψ hat man, von periodischen Gliedern abgesehen, die Ausdrücke

$$\varphi = \nu_1 \qquad = \iota_1,$$
$$\psi = \nu_2 - \nu_1 = \iota_2 - t$$

Die Grösse ι_1 schwankt nach (23) und (25) um den Wert 90° und man hat von periodischen Gliedern abgesehen

$$-\psi - \iota = 90^\circ,$$

so dass die Rotation gebunden und stabil ist.

Was ι_2 betrifft, so hat man nach (22*)

$$(31) \qquad -\varphi - \iota_2 = \nu_2 t + c_2 + b \cos(\nu t + h),$$

wo

$$(31^*) \qquad \nu_2 = \frac{4(A-C)}{A} \frac{\xi_2}{C} + \frac{3n(A-C)}{A} \frac{f}{1 + An},$$

$$(31^{**}) \qquad b = \frac{3n(A-C)}{A\nu} \frac{g}{1 + An}.$$

Die Grösse ν_2 gibt uns die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet sich, immer mit gebundener Rotation, um den Radius Vector dreht. Da

$$\xi_2 = \nu_2 \cos\theta_0$$

und θ_0 einen nahe konstanten Wert in der Nähe von 90° hat, so ist ξ_2 klein. Dasselbe können wir nach (27) in Bezug auf den Wert von f annehmen, und da in ν_2 ausserdem die Differenz $A - C$ zwischen den Trägheitsmomenten als Faktor vorkommt, so muss diese Drehung eine sehr langsame sein.

4. Eine Vorstellung von der genäherten Grösse der Differenz $A - C$ könnte man vielleicht aus der Theorie der Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten erhalten. In der Mém. de l'Acad. de Montpellier 1849 hat ROCHE die Gleichgewichtsfigur eines Planeten (und Satelliten) mit gebundener Rotation untersucht. Er hat dabei folgende Werte für die Hauptachsen erhalten,[1] wo ich, wie oben, annehme, dass die Achse c gegen die Sonne gerichtet ist

[1] Man vergleiche TISSERAND Méc. cél. II s. 115.

$$(32)\qquad \frac{c-a}{a} = \frac{5\,ma^3}{m'r^3} = \frac{4\,(b-a)}{a}.$$

wo m = Sonnenmasse, m' = Masse des Planeten, r = Radius der kreisförmigen Planetenbahn um die Sonne. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Figurachse a senkrecht zur Ekliptik steht, so dass keine Drehung des Planeten um den Radius Vektor stattfindet. In unserem hier behandelten Fall, muss $a = b$ gesetzt werden, und die ROCHE'sche Untersuchung findet keine direkte Anwendung. Ich werde indessen die Annahme machen, dass die Formel

$$(32^*)\qquad \frac{c-a}{a} = \frac{5\,ma^3}{m'r^3}$$

einen genäherter Wert für die Gleichgewichtsfigur des flüssigen Planeten gibt, auch wenn eine Drehung um den Radius Vektor stattfindet.

Der Quotient $a:r$ ist gleich dem scheinbaren Radius des Planeten von der Sonne aus gesehen. Ist ϱ gleich dem scheinbaren Radius des Planeten *von der Erde* aus gesehen, wenn der Planet sich in Konjunktion mit der Erde befindet, so ist

$$\frac{a}{r} = \frac{1-r}{r}\,\varrho.$$

Ich nehme für *Merkur* ($r = 0.387$) den LEVERRIER'schen Wert

$$\varrho_{☿} = 3''.34$$

an, und für die *Venus* ($r = 0.723$) den HARTWIG'schen Wert

$$\varrho_{♀} = 8''.83.$$

Man hat also

für *Merkur:*

$$\frac{a}{r} = 5''.29 = 0.00002571,$$

für *die Venus:*

$$\frac{a}{r} = 3''.38 = 0.00001641.$$

Setzt man weiter mit BACKLUND

$$\frac{m'}{m} = 9\,700\,000$$

und nach LEVERRIER

$$\frac{m}{m_0} = 410\,000,$$

so erhält man

für *Merkur*

$$\frac{a-c}{a} = 10^{-[illegible]} \cdot 0.[illegible],$$

und für *die Venus*

$$\frac{a-c}{a} = 10^{-[illegible]} \cdot 0.[illegible]$$

Die Abplattung der beiden Planeten sollten also, unter der gemachten Voraussetzung, dass die ROCHE'sche Formel hier Anwendung findet, und dass die Gleichgewichtsfigur eines *flüssigen* Planeten auch auf den festen Planeten übertragen werden kann, eine sehr geringe sein. Zwar wissen wir aus den entsprechenden Zahlen für den Mond, dass diese theoretische Abplattung in der Wirklichkeit viel vergrössert wird (beim Mond ung. 20 Mal). Wir können immerhin als wahrscheinlich annehmen, dass die tatsächliche Abplattung der Planeten eine sehr geringe ist, um so mehr da die Beobachtungen keine Abplattung angedeutet haben. Hierbei muss man zwar, wie schon bemerkt, in Betracht ziehen, dass die Verlängerung dieser Planeten gegen die Sonne sehr schwierig ist aus den Beobachtungen zu finden.

Da $a-c$ als Faktor in ν_2 (31) vorkommt, können wir schliessen, dass die Drehung der Planeten, wenn sie überhaupt vorkommt, sehr langsam vor sich geht.

5. Fasse ich die obige Untersuchung zusammen, so habe ich also folgende Resultate erhalten:

1) Die flutwirkende Kraft der Sonne auf die beiden Planeten Merkur und Venus ist viel geringer als die entsprechende Wirkung der Erde auf den Mond. Es liegt daher keine

zwingende Gründe vor bei diesen Planeten eine gebundene Rotation anzunehmen.

2) Wenn indessen bei diesen Planeten (oder bei einem derselben) gebundene Rotation vorkommt — was nicht ausgeschlossen ist — so kann diese *entweder* so beschaffen sein, wie bei unserem Monde, so dass die Rotationsachse eine im Körper und im Raume nahe unveränderliche Lage einnimmt; *oder* es kann gleichzeitig mit der gebundenen Rotation eine *Drehung um den Radius Vektor* des Planeten stattfinden. Die Lage der Rotationsachse ist dann zwar im Raum, nicht aber im Körper, nahe unveränderlich.

3) Die Drehung, welche im letzteren Falle stattfindet, geschieht äusserst langsam, so dass eine volle Umdrehung, um den Betrag von 360°, erst nach vielen Umläufen des Planeten um die Sonne vollendet wird. In den Ausdrücken für die Rotationselemente kommen zwei mit Integrationskonstanten multiplizierten Störungen vor, von denen die eine langperiodisch ist, die andere eine Periode hat, die unbedeutend kürzer als die Umlaufszeit des Planeten ist.

Tryckt den 26 juni 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

UPPSALA 1908. ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.